FONCTIONS I

GÉNÉRALITÉS

Lorsque deux quantités *variables* sont liées l'une à l'autre et plus particulièrement lorsque l'une dépend de l'autre, cette relation de dépendance qui les unit mérite d'être étudiée pour elle-même. Il faut pour cela parvenir à faire de cette relation d'abord évanescente un *objet* mathématique. Ce ne fut pas une mince affaire. C'est le concept de *fonction*, fruit d'une longue maturation, qui répond à cette exigence. Il est (avec la notion de *limite* étudiée en première) le concept central d'un domaine important des mathématiques aujourd'hui appelé l'*Analyse*. La locution « en fonction de », qui est passée dans la langue courante où elle traduit une idée de dépendance, provient du sens mathématique du mot *fonction*.

Une fonction est souvent associée à sa *représentation graphique*, mais comme deux concepts ne cohabitent bien que s'ils sont d'abord clairement distingués, nous allons les décoller l'un de l'autre en allant jusqu'à scinder notre étude en plusieurs chapitres. Il y aura ainsi trois chapitres sur les fonctions : celui-ci, qui traite des fonctions en soi, un deuxième, qui parlera de leurs représentations graphiques, puis un dernier chapitre qui traitera enfin des *variations* d'une fonction, car somme toute, c'est bien de variation qu'il s'agit.

I. PRÉSENTATION

« DÉFINITION »

On appelle **fonction** un « processus mathématique » qui, à 'tout' nombre réel, en **associe** un 'autre', appelé son **image**.

REMARQUES

Cette définition n'en est pas une. C'est une présentation intuitive. Pour une définition rigoureuse du concept de fonction, il faudra lire le dernier paragraphe de ce cours (bon courage). Si au contraire vous avez besoin d'une présentation plus métaphorique, dites-vous simplement qu'une fonction est une « machine » dans laquelle on entre un nombre et qui « fonctionne » en produisant, à partir du nombre entré, un autre nombre.

On peut inventer toutes les fonctions qu'on veut. Certains réels peuvent ne pas avoir d'image, mais le grand principe, la seule chose qu'on exige, c'est qu'un nombre n'ait jamais plusieurs images. Pour reprendre la métaphore ci-dessus, si vous entrez un jour le nombre 2 dans la machine et qu'il sort le nombre 7, à chaque fois que vous entrerez 2, il sortira 7. C'est une machine déterministe.

Il peut arriver que l'image soit égale au nombre de départ.

Le mot *image* a le même sens que l'image d'un point par une symétrie, par exemple. Une symétrie produit un point à partir d'un point, là où une fonction produit un nombre à partir d'un autre.

Le mot « associe » peut induire en erreur car il connote l'idée que la relation est symétrique, qu'elle va dans les deux sens. Or ici, c'est une association à sens unique. Si une fonction associe 9 au nombre 3, cela ne veut pas dire qu'elle associera 3 au nombre 9. Peut-être qu'*adjoindre* eût été préférable à *associer*. Par ailleurs, le mot « associe » induit, à tort, chez certains novices, l'idée d'addition.

« Opérande »

On manque d'un mot pour dire le nombre entré dans la fonction, le nombre de départ. On pourrait l'appeler « **opérande** ». Le mot *antécédent* le convient pas, car un antécédent ne se conçoit que comme antécédent <u>de</u> quelque chose. Le mot « opérande » est masculin.

Exemples

- La *fonction carré* est celle qui élève tout nombre réel au carré. L'image de 3, par la fonction carré, est 9.

$$3 \longmapsto \boxed{\text{Fonction carré}} \longrightarrow 9$$

- La *fonction inverse* prend l'inverse d'un nombre. L'image de $\frac{2}{3}$ par la fonction inverse est $\frac{3}{2}$.
- La *fonction racine* prend la racine d'un nombre. L'image de 9 par la fonction racine est 3.

- On peut aussi définir une fonction par n'importe quelle expression algébrique. On peut par exemple décréter que, si x est le nombre de départ, alors son image sera $\dfrac{x^2+1}{x-5}$.
- Mais on peut imaginer des fonctions si curieuses, qu'elles ne puissent être décrite par aucune expression algébrique ; comme par exemple la fonction qui, à tout nombre rationnel associe le nombre 1 et qui à tout irrationnel associe le nombre 0. On peut même prouver, à l'aide des idées de Cantor sur la comparaison des ensembles infinis (voir chapitre *Les Ensembles*, dernier paragraphe) qu'il existe des fonction si insaisissables qu'aucune phrase mathématique ne pourra jamais les décrire. Au lycée, toutefois, les fonctions rencontrées resteront suffisamment sages pour qu'on puisse les exprimer algébriquement.

II. Notations

Fonction

Une fonction étant un *objet mathématique*, on peut la représenter par une lettre, au même titre qu'un point, une figure, un nombre ou un ensemble. Alors, la lettre en question « contient » bien plus d'information qu'un simple nombre.

Image d'un nombre par une fonction

Soit F une fonction et x un nombre appartenant à l'ensemble de définition de F.

On note « $F(x)$ » (lire : « F de x ») l'image, par la fonction F, du nombre x (l'image, par F, de x.)

Les parenthèses font aujourd'hui partie de cette notation. Il est rare qu'on s'en dispense, mais cela arrive, par exemple pour les fonctions trigonométriques *sin*, *cos*, *tan*.

Entre la lettre F et le (x), il n'y a pas de signe opératoire implicite, pas de multiplication. C'est F elle-même qui joue le rôle d'opérateur.
Cette tentation de voir un produit peut être renforcée par la lecture « F de x », où le « de » pourrait faire penser à celui de « $\frac{2}{3}$ de x ».
La « notation fonctionnelle » est apparue progressivement. On la voit émerger au tournant du XVII^{e} et du XVIII^{e} siècles dans la correspondance entre le mathématicien allemand Leibniz (prononcer Leibni**t**z) et le mathématicien suisse Jean Bernoulli. On doit à Leibniz les mots *fonction*, *constante*, *variable* et *paramètre*. (Leibniz est caricaturé sous les traits du personnage de Pangloss dans le *Candide* de Voltaire écrit en 1759.) La notation n'arrive véritablement à maturité que chez le mathématicien suisse Leonhard Euler en 1734.

Définir une fonction par une expression algébrique

Pour dire que g est la fonction carré, on peut désormais écrire :

« quel que soit le réel x : $g(x)=x^2$ »

Quantificateurs

La phrase précédente peut encore s'écrire :

« $\forall x\in\mathbb{R}\ ;\ g(x)=x^2$ »

Le signe « $\forall$ » se lit « quel que soit », ou encore « pour tout ». Il n'a rien à voir avec la notion de fonction, mais nous choisissons de l'introduire ici, car il nous permettra d'économiser des signes. Si E est un ensemble, au lieu d'écrire « Pour tout x appartenant à E », on peut écrire : « $\forall x\in E$ ». Après le signe « $\forall$ », on doit systématiquement rencontrer une variable (n'ayant pas été introduite antérieurement dans le texte). Nous n'utiliserons ce signe que dans le syntagme : « $\forall x\in E$ » (quel que soit x appartenant à E), où x est donc une nouvelle variable et E un ensemble.
Dans « quel que soit », *quel* est à entendre comme « n'importe quel ». « $\forall x\in E$ » signifie donc : « pour n'importe quel x qui soit élément de E… ». Ce serait une erreur que de transcrire « *quelque* soit ». Sauf si l'on tournait la phrase ainsi : « quelque réel que puisse représenter x… ».
Ce signe aurait été introduit par le mathématicien allemand Gerhard Gentsen en 1935. C'est un A renversé. Le A de *Alles* (*tout* en allemand, comme le *all* anglais). C'est un « signe valant pour tout » : *all-zeichen*. On l'appelle *quantificateur universel*, par opposition au *quantificateur existentiel* $\exists$ (il existe… tel que) introduit auparavant par le mathématicien italien Giuseppe Peano.

Principe de substitution

Si l'on définit une fonction F par une expression algébrique, par exemple : $\forall x\in\mathbb{R}\ ;\ F(x)=x^2+x+1$, alors, puisque l'égalité est vraie « quel que soit » x, elle est vraie, en particulier, si l'on attribue à x la valeur **2**. On a donc :

$$F(\mathbf{2}) = \mathbf{2}^2 + \mathbf{2} + 1$$

L'égalité reste vraie, bien entendu, lorsque x vaut $\sqrt{\mathbf{2}}+\mathbf{5}$:

$$F\left(\sqrt{\mathbf{2}}+\mathbf{5}\right) = \left(\sqrt{\mathbf{2}}+\mathbf{5}\right)^2 + \left(\sqrt{\mathbf{2}}+\mathbf{5}\right) + 1$$

Et si, maintenant, on veut exprimer l'image de $2y+5$ par F (où y est un réel quelconque), rien n'empêche de poser $x = \mathsf{2y+5}$ et d'écrire : $F(\mathsf{2y+5}) = (\mathsf{2y+5})^2 + (\mathsf{2y+5}) + 1$

Ce qui est vrai pour tout y l'étant aussi pour tout x ; on peut tout aussi bien écrire : $F(2x+5) = (2x+5)^2 + (2x+5) + 1$

Bref, dans l'égalité « $F(x) = x^2 + x + 1$ », <u>on peut remplacer x par « ce qu'on veut »</u> : une constante, une autre variable ou une expression.

Pour suggérer l'universalité du principe de substitution à ceux d'entre nous qui avaient du mal à l'entendre, mon professeur de mathématiques de seconde (François Combescure, devenu depuis directeur de l'établissement Fénelon Sainte Marie à Paris), dégainait l'écriture intentionnellement abusive suivante, où «  » peut se lire « p'tite télé » :

En dernier ressort, je reprendrai (en la modifiant un peu) la notation de Bourbaki au début de sa *Théorie des Ensembles* :

$$F(\square) = \square^2 + \square + 1$$

Distribution abusive

$F(a+b)$ représente <u>l'image de la somme</u> $(a+b)$.

Alors que $F(a)+F(b)$ représente <u>la somme des images</u> de a et de b. Ce n'est pas la même chose.

Par exemple, si F est la fonction carré et qu'on choisit pour a et b les valeurs 2 et 3, on a :

$$F(2+3) = F(5) = 5^2 = \boxed{25}$$

Alors que $F(2)+F(3) = 2^2 + 3^2 = 4 + 9 = \boxed{13}$

La tentation de distribuer due au fait que « $F(a+b)$ » ressemble à « $a(b+c)$ » peut être renforcée par la tentation déjà signalée, de fantasmer un produit dans la « notation fonctionnelle ». D'autant que, le nom de la fonction étant souvent F, la lecture « ***F* de** $a+b$ »pourra évoquer l'expression « **Facteur de** a + b ».

Flèche à talon

Pour exprimer la fonction qui, à tout x réel, associe $x^2 + x + 1$, on écrit : $x \mapsto x^2 + x + 1$. Dans une telle écriture, on peut remplacer la variable x par n'importe quelle autre lettre sans que, vu de l'extérieur, cela ne change quoi que ce soit (on parle alors de *variable muette*.) Ainsi l'expression $y \mapsto y^2 + y + 1$ représente exactement la même fonction. On pourrait tout aussi bien écrire $\square \mapsto \square^2 + \square + 1$. L'expression avec la flèche à talon contient son propre *quantificateur* (le « quel que soit »).

Contrairement à ce qui se passe entre les parenthèses de la « notation fonctionnelle » (mais conformément à ce qui se passe après un *quantificateur*) à gauche de la flèche à talon, on doit toujours rencontrer <u>une</u> variable et non pas une expression ni une constante. On <u>n</u>'écrira <u>pas</u> : « $x+1 \mapsto (x+1)^2$ »
La notation avec la flèche à talon diffère de la notation « $f(\ )$ » en ceci qu'avec la flèche à talon on exprime directement <u>la fonction elle-même</u> alors que « $f(x)$ » ne représente que <u>l'image</u> d'un nombre par une fonction.

$F: \ x \mapsto x^2+x+1$ se lit : « F est la fonction qui, à tout x, associe x^2+x+1 ».

III. Ensemble de définition

Ensemble de définition

L'**ensemble de définition** d'une fonction est l'*ensemble* des valeurs qui admettent une image par cette fonction.

On parle aussi de **domaine de définition** ou encore d'**ensemble de départ**.
Lorsqu'un nombre n'a pas d'image, par une fonction donnée, on dit parfois que c'est une *valeur interdite*. L'ensemble de définition est le *complémentaire* de l'ensemble des valeurs interdites. C'est

l'ensemble des « valeurs autorisées » pour la fonction considérée. C'est souvent $\mathbb{R}$.

Exemples

Par la fonction inverse, il n'y a qu'un seul nombre qui n'ait pas d'image, qui soit une « valeur interdite » : c'est 0. Donc l'ensemble de définition est le *complémentaire* de $\{0\}$, c'est-à-dire $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$, qu'on peut aussi noter $\mathbb{R}^*$.

Par la fonction racine, tous les nombres positifs (y compris zéro) admettent une image. Mais les nombres strictement négatifs n'ont pas de racine. Donc l'ensemble de définition de la fonction racine est l'ensemble des réels positifs, c'est-à-dire $[0;+\infty[$, qu'on peut aussi noter $\mathbb{R}_+$.

Tous les nombres réels ont un carré, donc l'ensemble de définition de la fonction carré est $\mathbb{R}$.

Ensemble d'arrivée

Pour nous, en seconde, l'ensemble d'arrivée sera toujours $\mathbb{R}$. Il n'est pas nécessaire que toutes les valeurs de l'ensemble d'arrivée soient atteintes. Par exemple, on peut considérer que l'ensemble d'arrivée de la fonction carré est $\mathbb{R}$, alors que les valeurs strictement négatives ne sont jamais atteintes par la fonction carré.
Restreindre l'ensemble d'arrivée peut avoir un intérêt si l'on cherche à fabriquer la « fonction réciproque » d'une fonction donnée, celle qui « fait le contraire ». Par exemple, la fonction réciproque de la fonction carré est la fonction racine, à condition qu'on restreigne l'ensemble de départ de la fonction carré, mais aussi son ensemble d'arrivée à $\mathbb{R}_+$.

Notation complète avec la flèche à talon

On peut préciser, dans la notation avec flèche à talon, l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée. Ainsi, l'écriture :

$$f:\ \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{1}{x}$$

se lit : « soit *f* la fonction qui va de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ et qui, à tout *x*, associe $\frac{1}{x}$. La flèche du haut n'est pas une flèche à talon.

Lorsqu'on ne précise pas, l'ensemble de départ (ni l'ensemble d'arrivée) on convient que l'ensemble de départ sera le plus grand possible permis par l'expression.

IV. Antécédents

Définition

Soient a et b deux nombres réels donnés. Par une fonction donnée,

a est un **antécédent** de b ssi b est l'image de a

(Rappelons que « ssi » est une abréviation de « si, et *seulement* si ».)

Remarque

Un réel peut avoir plusieurs antécédents. Il peut aussi ne pas en avoir du tout.

Exemples

Par la fonction carré, 9 a deux antécédents : 3 et −3, alors que −9 n'a pas d'antécédent, car il n'y a pas de nombre réel dont le carré soit égal à −9.

V. Fonctions particulières

Fonctions usuelles

Nous avons déjà rencontré la *fonction carré* ($x \mapsto x^2$), la *fonction inverse* ($x \mapsto \frac{1}{x}$) et la *fonction racine* ($x \mapsto \sqrt{x}$).

Fonction identité

La **fonction identité** est la fonction qui ne fait rien : le nombre qui sort est identique au nombre entré. C'est la fonction $x \mapsto x$. On la note *Id*.

Fonctions constantes

Une fonction dont l'image a toujours la même valeur est appelée fonction **constante**. Exemple : $x \mapsto 2$.

La fonction constante $x \mapsto 0$ s'appelle la **fonction nulle**.

Fonctions affines

On appelle fonction **affine** toute fonction qui peut s'écrire sous la forme $x \mapsto ax + b$, où a et b sont des constantes, c'est-à-dire indépendantes de x.

Si de plus $b = 0$, alors la fonction est dite **linéaire**.

Exemples : $x \mapsto 2x+1$ est une fonction affine.

$x \mapsto 2x$ est une fonction linéaire (donc aussi affine).

Fonctions polynômes

On appelle **fonction polynôme** toute fonction qui s'exprime comme un polynôme selon la variable de départ.

Exemple : $x \mapsto 3x^2 - 5x + 4$

VI. Fonctions paires et impaires

Considérons d'abord, pour simplifier, le cas des fonctions définies sur $\mathbb{R}$.

Définitions

Une fonction est dite **paire** lorsque, par cette fonction, l'image d'un nombre est toujours égale à celle de l'opposé de ce nombre. Autrement dit, lorsque : $\forall x \in \mathbb{R}\ ;\ f(-x) = f(x)$.

Une fonction est dite **impaire** lorsque l'image de l'opposé est toujours égale à l'opposé de l'image. Autrement dit, lorsque : $\forall x \in \mathbb{R}\ ;\ f(-x) = -f(x)$.

Etudier la **parité** d'une fonction, c'est regarder si elle est paire ou impaire.

Remarque

Une fonction peut très bien n'être ni paire ni impaire, c'est même le plus souvent le cas.

Exemples

La fonction carré est *paire*. La fonction cube ($x \mapsto x^3$) est *impaire*. La fonction $x \mapsto x+1$ n'est ni paire ni impaire.

Dans le cas où l'ensemble de définition n'est pas $\mathbb{R}$, il faut d'abord, pour qu'une fonction soit paire ou impaire, que son ensemble de définition D soit « symétrique par rapport à 0 », c'est-à-dire qu'on ait : $\forall x \in \mathbb{R}\ ;$ si $x \in D$ alors, $-x \in D$.

VII. Définition rigoureuse du concept de fonction

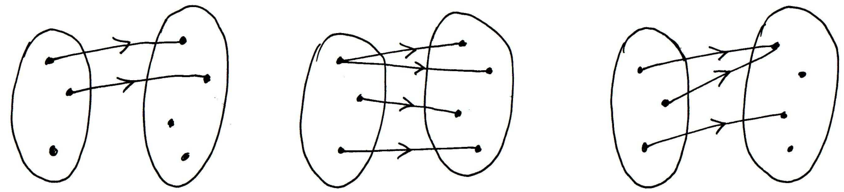
Pour introduire rigoureusement la notion de fonction, on peut soit la définir comme une *relation* particulière, soit la définir à partir du concept d'ensemble (notion de *graphe*), soit la considérer un « concept premier », à l'instar du point ou de la droite en géométrie.

Application

Le mot *fonction* est en général réservé aux processus qui, à partir d'un nombre en produisent un autre. Parfois, on se contente d'exiger que l'image soit un nombre, mais on autorise l'élément de départ (que nous avons appelé « opérande ») à être un autre objet mathématique. Lorsqu'on veut mentionner le concept plus général, pour lequel on n'exige ni de l'« opérande » ni de l'image qu'ils soient des nombres, on parle plus volontiers d'**application** que de fonction. Ainsi, une symétrie est une *application* du plan dans lui-même. Et d'ailleurs, avec les symétries, on utilise le mot « image » de la même façon que chez les fonctions.

Relation

Une application peut être vue comme une *relation* particulière, qui à chaque nombre d'un ensemble de départ, associe un unique nombre dans un ensemble d'arrivée. Sur l'exemple qui suit, on représente à gauche l'ensemble de départ (à trois éléments) et à droite l'ensemble d'arrivée (à quatre éléments). Les mises en relation sont indiquées par les flèches.



N'est pas une application car il y a un élément qui n'a pas d'image.	N'est pas une application car il y a un élément qui a deux images.	Est une application.

Graphe

Le *graphe* d'une fonction n'est pas exactement sa *représentation graphique*, que nous étudierons dans un chapitre ultérieur. Imaginons un dieu qui puisse définir une fonction non pas globalement, mais nombre par nombre. C'est une tâche humainement impossible, puisqu'il y a une infinité de réels. Mais le dieu en question pourrait, lui, établir la 'liste' de couples, dont le premier terme serait l' « opérande » (le nombre de départ) et le second l'image qu'il souhaite lui voir attribuer. L'<u>ensemble</u> de tous ces couples s'appelle le *graphe* de la fonction. Cet ensemble contient toutes les informations de la fonction. On peut donc, en identifiant la fonction à son graphe, définir le concept de fonction à partir de celui d'ensemble.

Lambda-calcul

Aujourd'hui, la façon considérée comme la plus classique de fonder les mathématiques consiste à partir du concept d'*ensemble*. Mais au lieu de tout fonder sur les ensembles on peut

tout fonder sur les *fonctions*, qui deviennent ainsi un « concept premier » et n'ont donc plus à être définies. C'est le propos du *lambda-calcul*, qui peut servir aussi de langage de programmation.